Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală
Iaşi, 17 Aprilie 2006
SOLUŢII ŞI BAREMURI

CLASA A XII-A

Problema 1. Fie K un corp finit. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $1+1=0$;

b) oricare ar fi $f \in K[X]$ cu $\operatorname{grad} f \geq 1$, rezultă că $f(X^2)$ este reductibil.

Soluţie. Pentru a demonstra că a) implică b), considerăm $F : K \to K$, $F(x) = x^2$. Din $F(x) = F(y)$ rezultă $x^2 = y^2$, adică $(x-y)(x+y) = 0$, deci $(x-y)^2 = 0$, de unde $x = y$. Prin urmare F este injectivă şi deci surjectivă .... 2 puncte

Dacă $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, atunci există $b_k \in K$ astfel încât $a_k = b_k^2$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. Rezultă că

$$f(X^2) = \sum_{k=0}^{n} b_k^2 X^{2k} = \sum_{k=0}^{n} b_k^2 X^{2k} + 2\sum_{i<j} b_i b_j X^{i+j}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right)^2,$$

deci $f(X^2)$ este reductibil .... 2 puncte

Reciproc, fie $a \in K$ şi $f = X - a$. Cum $g = f(X^2) = X^2 - a$ este reductibil, atunci g are o rădăcină în K .... 1 punct

Deci funcţia F este surjectivă şi în consecinţă injectivă... 1 punct

Cum $F(1) = F(-1) = 1$, rezultă $1 = -1$ .... 1 punct

Problema 2. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

unde $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$, daca $x \in (0,1]$ si $f(0) = 1$.

Soluţie. Notăm

$$I = n\left(\frac{\pi}{4} - n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\mathrm{d}\,x\right)$$

Avem

$$I = n\left(\frac{\pi}{4} - \int_0^1 x(\operatorname{arctg} x^n)' \mathrm{d}\, x\right)$$
$$= n\left(\frac{\pi}{4} - x\operatorname{arctg} x^n \big|_0^1 + \int_0^1 \operatorname{arctg} x^n \mathrm{d}x\right) = n\int_0^1 \operatorname{arctg} x^n \mathrm{d}x$$

....2 puncte

$$I = n\int_0^1 x^n \frac{\operatorname{arctg} x^n}{x^n}\mathrm{d}x = n\int_0^1 x\cdot x^{n-1}\frac{\operatorname{arctg} x^n}{x^n}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 x\left(\int_0^{x^n} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\mathrm{d}t\right)' \mathrm{d}x$$
$$= x\int_0^{x^n} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\mathrm{d}t\,\big|_0^1 - \int_0^1 \left(\int_0^{x^n} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\mathrm{d}t - \int_0^1 \left(\int_0^{x^n} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

....2 puncte

Ţinând seama de inegalitatea $\operatorname{arctg} t \leq t$, $t \geq 0$, obţinem

$$0 \leq \int_0^1 \left(\int_0^{x^n} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leq$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^n} \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

de unde rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\int_0^{x^n} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = 0,$$

ceea ce conduce la concluzia dorită.........................3 puncte

Problema 3. Fie G un grup finit cu n elemente ($n \geq 2$) şi p cel mai mic factor prim al lui n. Dacă G are un singur subgrup H cu p elemente, arătaţi că H este conţinut în centrul lui G. (Centrul lui G este multimea $Z(G) = \{a \in G | ax = xa, \forall x \in G\}$)

Soluţia 1. Pentru fiecare $g \in G$ multimea gHg^{-1} este un subgrup de ordinul p al lui G. Subgrupul H fiind singurul subgrup de ordinul p al lui G, rezultă că $gHg^{-1} = H$..........................1 punct

Fie $g \in G$ şi $f : H \to H$, $f(x) = gxg^{-1}$..................1 punct

Deoarece $f(e) = e$ şi f este bijectivă, rezultă că restricţia lui f la $H \setminus \{e\}$ este o permutare a mulţimii $H \setminus \{e\}$................1 punct

Rezultă că $f^{(p-1)!} = 1_H$................................2 puncte

Avem $f^{(n)} = 1_H$ .... 1 punct

Din $(n, (p-1)!) = 1$ rezultă că $f = 1_H$, deci $gx = xg$ pentru orice $x \in H$ .... 1 punct

Soluţia 2. Întrucât ordinul p al lui H este prim, rezultă că H este ciclic:

$$H = \langle h \rangle = \left\{h, \cdots, h^{p-1}, h^p = e\right\}, \tag{1}$$

unde e este elementul neutru al lui G. Este suficient să arătăm că $gh = hg$, oricare ar fi $g \in G$. Fie $g \in G$ şi

$$K = \left\{k : k \in \{1, \cdots, n\} \text{ şi } g^k h = hg^k\right\}.$$

Mulţimea K nu este vidă, deoarece $n \in K : g^n = e$, deci $g^n h = eh = h = he = hg^n$. Vom arăta că şi 1 este un element al lui K si cu aceasta problema va fi rezolvată. Fie m cel mai mic element al lui K. Din minimalitatea lui m rezultă că m este un divizor al lui n şi

$$K = \left\{km : k = 1, \cdots, \frac{n}{m}\right\}. \tag{2}$$

Pe de altă parte, gHg^{-1} este un subgrup de ordinul p al lui G. Subgrupul H fiind singurul subgrup de ordinul p al lui G, rezultă că $gHg^{-1} = H$, *i.e.* $gH = Hg$. Din (1) şi $gH = Hg$, deducem că există $k \in \{1, \cdots, p-1\}$, astfel încât $gh = h^k g$. Prin urmare,

$$g^{p-1}h = h^{k^{p-1}} g^{p-1} = hg^{p-1},$$

deoarece $k^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ (mica teoremă a lui Fermat) şi $h^p = e$. Aşadar, $p-1$ este un element al lui K. Din (2) deducem că m este un divizor al lui $p-1$. Întrucât p este cel mai mic factor prim al lui n, rezultă că n şi $p-1$ sunt relativ prime, deci $m = 1$.

Soluţia 3. Fie $f : G \to H$, $f(x) = xax^{-1}$ cu $a \in H \setminus \{e\}$, fixat. Notăm cu $C(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$ şi cu q numărul elementelor lui $C(a)$. Cum $f(x) = f(y)$ este echivalent cu $xax^{-1} = yay^{-1}$, adica echivalent cu $y^{-1}xa = ay^{-1}x$, deci cu $y^{-1}x \in C(a)$, de unde $x \in yC(a)$, rezultă că pentru orice $b \in Imf$ mulţimea $\{x \in G \mid f(x) = b\}$ are q elemente, deci Imf are $\frac{n}{q}$ elemente. Cum $e \notin Imf$ rezultă că $\frac{n}{q} \leq p-1$ şi cum $\frac{n}{q}|n$ obţinem $\frac{n}{q} = 1$, deci $C(a) = G$. Rezultă că $ax = xa$ pentru orice $x \in G$, deci $a \in Z(G)$. Cum $e \in Z(G)$ rezultă $H \subset Z(G)$.

Observaţii. (1) Soluţia 3 se poate rescrie astfel:

Cum H este unicul subgrup cu p elemente al lui G rezultă că H este subgrup normal in G. Fie $a \in H \setminus \{e\}$. Acţionând grupul G pe H prin conjugare rezultă că

$$|G| = |Stab(a)| \cdot |Orb(a)|.$$

Cum $e \notin Orb(a)$ atunci $|Orb(a)| \leq p-1$ deci $|Orb(a)| = 1$. Rezultă astfel $Stab(a) = G$, deci $a \in Z(G)$.

(2) Cel mai simplu exemplu de grup *necomutativ*, care satisface condiţiile din enunţ, este grupul multiplicativ de ordinul 8 al cuaternionilor: $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$; multiplicarea este complet determinată de următoarele reguli: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ şi $ij = -ji = k$. Singurul subgrup de ordinul 2 este chiar centrul, $\{\pm 1\}$.

(3) În enunţul problemei este suficient ca p să fie un factor prim al lui n, astfel încât $p-1$ şi n să fie relativ prime; evident, cel mai mic factor prim al lui n are această proprietate.

Problema 4. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Să se arate că există $c \in (0,1)$ astfel încât

$$\int_0^c xf(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Soluţie. Să considerăm funcţia derivabilă, $F : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$F(t) = t\int_0^t f(x)dx - \int_0^t xf(x)dx$ .... 1 punct

Atunci $F'(t) = \int_0^t f(x)dx$. .... 1 punct

Definim funcţia $H : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$H(t) = \begin{cases} \dfrac{F(t)}{t} & \text{, dacă } t \neq 0 \\ 0 & \text{, dacă } t = 0 \end{cases}$$

Se observă că H este continuă şi îşi atinge marginile pe $[0,1]$..1 punct

Să presupunem că există $c \in (0,1)$ care este punct de extrem. Conform teoremei lui Fermat, avem că

$$H'(c) = 0$$

ceea ce este echivalent cu

$$F(c) = cF'(c),$$

adică echivalent cu

$$c\int_0^c f(x)dx - \int_0^c xf(x)dx = c\int_0^c f(x)dx,$$

de unde obţinem $\int_0^c xf(x)dx = 0$. . . . . 2 puncte

Dacă H îşi atinge marginile în 0 si 1, atunci avem una din situaţiile $H(0) \le H(t) \le H(1)$ sau $H(1) \le H(t) \le H(0), \forall t \in [0,1]$. Să presupunem că suntem în prima situaţie. Atunci $\frac{F(t)}{t} \le F(1)\ \forall t \in (0,1]$, deci $F(t) \le tF(1)\ \forall t \in [0,1]$. Rezultă că

$$\frac{F(1)-F(t)}{1-t} \ge \frac{F(1)-tF(1)}{1-t} = F(1),\ \ \forall t \in [0,1).$$

Obţinem $F'(1) \ge F(1)$, adică $0 \ge F(1) = H(1)$. Atunci $0 = H(0) \le H(t) \le H(1) \le 0$, deci $H(t) = 0\ \forall t \in [0,1)$. Cum $H'(t) = 0\ \forall t \in [0,1]$ rezultă concluzia pentru orice $c \in (0,1)$. . . . . 2 puncte